

Reptes

Problemes

Óscar Rivero

Simons Laufer Mathematical Sciences Institute (Berkeley)

Arriba un nou número de l'*SCM/Notícies* amb quatre problemes per resoldre.

En aquesta ocasió, els nostres *imprescindibles* Miquel Amengual i Joaquim Nadal ens fan suggeriments al voltant de la geometria clàssica, i José Luis Díaz ens proposa un problema de successions. Finalment, Marc Felipe, doctorand al grup de teoria de nombres de la UPC, ens envia un interessant problema de combinatòria.

Pel que fa a les solucions dels problemes, n'hem rebut de Miquel Amengual, Pere Martínez i Joaquim Nadal. Els agraïm a tots la dedicació, el temps i les solucions originals. En publiquem, com és habitual, una selecció.

Us animem a tots a enviar les vostres propostes, tant de problemes com de solucions. S'han d'enviar preferiblement en LaTeX, i així mateix cal adjuntar els dibuixos corresponents en un format que sigui editable. Agraïrem que sigui així per poder editar els fitxers d'una manera ràpida i eficaç, gràcies! Les solucions i propostes de problemes envieu-les a

riverosalgado@gmail.com.

Problemes proposats

A181. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca; dedicat a la memòria de Joan Girbau.)

Sobre els costats d'un quadrilàter convex $ABCD$ construïm, a l'exterior, rectangles $ABPQ$, $BCRS$, $CDP'Q'$ i $DAR'S'$ tals que $AB : BP = BC : CR = CD : DP' = DA : AR' = 2 : 1$.

Si denotam per a P'' , Q'' , R'' , S'' els respectius punts mitjans dels segments PP' , QQ' , RR' ,

SS' , provau que el quadrilàter $P''Q''R''S''$ és un quadrat.

A182. (Proposat per Marc Felipe i Alsina, UPC, Barcelona.) Sigui $n \geq 2$ un nombre enter. Determineu de quantes maneres es poden situar els nombres $1, 2, 3, \dots, 2n$ en les caselles d'un tauler $2 \times n$, un en cada casella, de manera que dos nombres consecutius qualssevol sempre es trobin en caselles que comparteixin un costat. (Per exemple, si $n = 2$ podeu veure que la resposta és 8.)

A183. (Proposat per José Luis Díaz Barrero, UPC, Barcelona.) Sigui α un nombre real amb $0 \leq \alpha \leq 1$. Sigui $\{a_n\}_{n \geq 1}$ una successió definida per $a_1 = 0$ i

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(\alpha - a_n^2) \text{ per a tot } n \geq 1.$$

Proveu que existeix el límit de la successió $\{a_n\}_{n \geq 1}$ quan n tendeix cap a infinit i calculeu-lo.

A184. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, Girona.)

En el triangle ABC , sigui $L \in BC$, $M \in CA$ i $N \in AB$ de manera que $BL = \ell \cdot BC$, $CM = m \cdot CA$ i $AN = n \cdot AB$. Considerem els punts $P = AL \cap BM$, $Q = BM \cap CN$ i $R = CN \cap AL$. Sabent que l'àrea del triangle PQR és 1, trobeu l'àrea del triangle ABC en funció de ℓ , m i n .

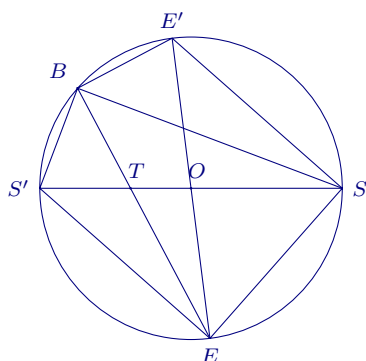
Solucions

A177. (Proposat per Carles Romero.) Sigui T un punt interior a un cercle de centre O , amb $T \neq O$, i sigui E la intersecció de la recta

TO amb el cercle, de manera que el centre O pertanyi al segment determinat per T i per E . Determineu com trobar una corda BS del cercle, que contingui T , i de manera que $BE = BS$.

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Considerem el problema resolt, indiquem per Ω el cercle donat a l'enunciat i siguin E', S' els punts respectius de Ω diametralment oposats a E, S .



Els triangles BEE' i BSS' són iguals: tots dos són rectangles, tenen la mateixa circumferència circumscrita i tenen igual un catet ($BE = BS$, per construcció). En resulta que $\angle S'SB = \angle BEE'$.

Atès que $\angle S'EB = \angle S'SB$ (ja que ambdós angles inscrits comprenen el mateix arc de Ω), tindrem, doncs,

$$\begin{aligned}\angle S'ET &= \angle S'EB = \angle S'SB \\ &= \angle BEE' = \angle TEO.\end{aligned}$$

Això ens revela que ET és la bisectriu de $\angle S'EO$. Del teorema de la bisectriu interior, aplicat a $\triangle S'EO$, se'n dedueix que

$$S'E = \frac{S'T \cdot TO}{EO}.$$

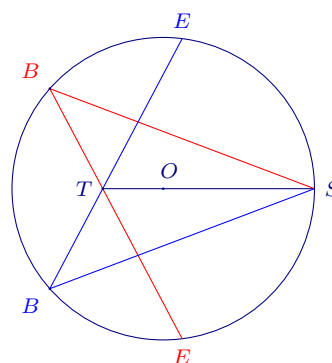
CONSTRUCCIÓ

Traçam la circumferència de centre S' i radi $S'E$, que coincideix amb la quarta proporcional dels segments $S'T$, TO i EO , la construcció de la qual és ben coneguda.

El segon punt d'intersecció de la recta ET amb Ω resol el problema.

DISCUSSIÓ

El problema té dues solucions.



A178. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.) Sigui D un punt interior del costat BC d'un triangle ABC i siguin P, Q punts del segment AD . Les rectes BP i BQ tallen el costat CA en els punts E i G , respectivament. Les rectes CP i CQ tallen el costat AB en els punts F i H , respectivament. Suposem $\frac{BF}{FH} = \frac{CE}{EG}$. Demostreu que $BD = DC$.

Enunciat

Solució: (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, Girona, lleugerament modificada per la redacció.)

Comencem observant que es donen les igualtats següents (que es poden interpretar en el marc de la geometria projectiva):

$$\frac{AH}{AB} : \frac{HF}{FB} = \frac{AQ}{AD} : \frac{QP}{PD} = \frac{AG}{AC} : \frac{GE}{EC}.$$

Atès que, per hipòtesi, $\frac{HF}{FB} = \frac{GE}{EC}$, obtenim $\frac{AH}{AB} = \frac{AG}{AC}$ i, per tant,

$$HG \parallel BC.$$

Aleshores,

$$\frac{AH}{HB} = \frac{AG}{GC},$$

i, pel teorema de Ceva, podem concloure que

$$BD = DC.$$

A179. (Proposat per José Luis Díaz Barrero, UPC, Barcelona.) Sigui z un nombre complex que satisfà $|z - 1| > 2$. Proveu que $|z^3 - 1| > 1$.

Solució: (Solució de Pere Martínez, l'Hospitalet de Llobregat, Barcelona, lleugerament simplificada per la redacció.)

Com que $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$, és suficient provar que $|z^2 + z + 1| \geq \frac{1}{2}$. Suposem que $z - 1 = re^{i\theta}$, on $r = |z - 1| > 2$ i θ és un nombre real. Llavors,

$$z^2 + z + 1 = r^2 e^{2i\theta} + 3re^{i\theta} + 3.$$

Multiplicant pel conjugat, ens queda que el mòdul de $z^2 + z + 1$ és igual a

$$r^4 + 9r^2 + 9 + \cos \theta (6r^3 + 18r) + 6r^2 \cos 2\theta.$$

Fent servir que $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$, ens queda que l'expressió anterior és igual a

$$12\left(r \cos \theta + \frac{r^2 + 3}{4}\right)^2 + \frac{(r^2 - 3)^2}{4} > 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Això conclou la prova.

A180. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, Girona.) A l'interior del triangle equilàter ABC tenim un punt P tal que $PA = 6$, $PB = 7$ i $PC = 5$. Trobeu l'àrea del triangle sense usar sistemes d'equacions ni geometria analítica.

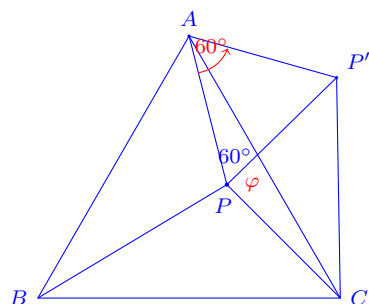
Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Més generalment, indiquem per a x, y, z les respectives distàncies del punt P als vèrtexs A, B, C del triangle equilàter ABC donat a l'enunciat.

Sigui $\triangle ACP'$ el transformat del triangle ABP en un gir de centre A i amplitud 60° .

Aleshores, el triangle APP' és equilàter: té dos costats iguals ($AP = AP'$, per construcció) i un angle de 60° .

Així doncs, $PP' = x$.



Posem $\varphi = \angle P'PC$ i indiquem per ℓ la longitud del costat de $\triangle ABC$. Del teorema del cosinus aplicat a $\triangle PCP'$, se'n dedueix que

$$\cos \varphi = \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx} \quad (1)$$

i aplicat a $\triangle APC$, en el qual $\angle APC = 60^\circ + \varphi$,

$$\begin{aligned} \ell^2 &= z^2 + x^2 - 2zx \cos (60^\circ + \varphi) \\ &= z^2 + x^2 - zx (\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi). \end{aligned}$$

Substituint aquí el valor de $\cos \varphi$ i substituint també $\sin \varphi$ per l'expressió deduïda de (1),

$$\sin \varphi = \frac{1}{2zx} \sqrt{4z^2x^2 - (z^2 + x^2 - y^2)^2}$$

s'obté

$$\begin{aligned} \ell^2 &= z^2 + x^2 - \frac{1}{2} \left(z^2 + x^2 - y^2 - \sqrt{3} \right. \\ &\quad \left. \cdot \sqrt{4z^2x^2 - (z^2 + x^2 - y^2)^2} \right), \end{aligned}$$

d'on deduïm que $2\ell^2 - x^2 - y^2 - z^2$ és igual a

$$\sqrt{3 \left(4z^2x^2 - (z^2 + x^2 - y^2)^2 \right)}.$$

Aquesta igualtat, racionalitzada, esdevé

$$\begin{aligned} 0 &= 2\ell^2x^2 + 2\ell^2y^2 + 2\ell^2z^2 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 \\ &\quad + 2z^2x^2 - 2\ell^4 - 2x^4 - 2y^4 - 2z^4. \end{aligned}$$

Sumant-hi $3\ell^4 + 3x^4 + 3y^4 + 3z^4$ als dos membres, obtindrem la igualtat següent, equivalent i més senzilla:

$$3 \left(\ell^4 + x^4 + y^4 + z^4 \right) = \left(\ell^2 + x^2 + y^2 + z^2 \right)^2.$$

Substituint $x = 5$, $y = 6$, $z = 7$, obtenim la següent quadràtica en ℓ^2 ,

$$\ell^4 - 110\ell^2 + 433 = 0,$$

l'única solució admissible de la qual és $\ell^2 = 55 + 36\sqrt{2}$ i, per tant, l'àrea demanada és

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 = \frac{36\sqrt{6} + 55\sqrt{3}}{4}.$$